Машиностроение, вып. 17. Вестн. Киев. политехн. ин-та. Киев, издательское объединение «Вища школа», 1980, 112+8 с.

В вестнике освещены результаты научных исследований сотрудников механико-машиностроительного, сварочного и инженерно-физического факультетов института в области прочности материалов, сварки, технической механики, металлорежущих станков, резания металлов, обработки металлов давлением, химико-термической обработки, порошковой металлургии и технологии производства стали.

Для научных, а также инженерно-технических работников соответствующих специальностей.

Адрес редакционной коллегии: 252056, Киев-56, Брест-Литовский проспект, 39, политехнический институт, механико-машиностроительный факультет, тел. 41-98-37.

Редакция естественной литературы
Зав. редакцией Б. Н. Фляшников

Выпущено по заказу Киевского политехнического института

$\text{В}\ \frac{31302\text{-}010}{\text{М}224(0)-80}\ .\ 2701000000$

УДК 539.3/5:678

Э. С. УМАНСКИЙ, д-р техн. наук, В. В. КРЮЧКОВ, канд. техн. наук, В. А. РАКОВСКИЙ, инж., В. С. ТИМОШЕНКО, Н. С. ШИДЛОВСКИЙ, ст. науч. сотрудники

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В МАГНИТНОЙ ЛЕНТЕ, НАМОТАННОЙ В РУЛОН

Магнитные ленты, как и другие полимерные материалы, обладают сложными механическими свойствами. Их деформация обычно является неравновесным процессом, развертывающимся во времени по сложным законам. Если при изучении этого процесса ограничиться областью рабочих напряжений, возникающих в результате намотки магнитной ленты в рулон в реальных условиях при нормальной температуре, то зависимость между напряжениями и деформациями в рулоне можно описать с помощью линейных соотношений Больцмана—Вольтерра вида:

$$\sigma_{ij} = \overrightarrow{R}_{ij}\varepsilon_{kl} = R_{ijkl}(0)\,\varepsilon_{kl} + \int_0^t \dot{R}_{ijkl}(t-\omega)\,\sigma_{kl}(\omega)\,d\omega, \tag{1}$$

где R_{ij} — функции релаксации материала.

Пусть в процессе намотки лента плотно, без зазоров навивается на абсолютно жесткую цилиндрическую оправку с постоянным моментом на валу ведущего двигателя, тогда усилие натяжения магнитной ленты в процессе намотки будет изменяться по закону

$$T = T_0 r_в / r_н; \quad (r_в \leqslant r \leqslant r_н), \tag{2}$$

где $r_в$ и $r_н$ — внутренний и внешний радиусы навивки, T_0 — усилие натяжения магнитной ленты, задаваемое в начале намотки.

Учитывая малую толщину витка магнитной ленты по сравнению с внешним радиусом рулона и считая тело навивки регулярной сплошной средой [4], уравнение равновесия можно записать так:

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0. \tag{3}$$

Выражения для деформаций, возникающих в рулоне магнитной ленты, имеют вид:

$$\varepsilon_r = du/dr;$$

$$\varepsilon_\theta = u/r + (\overset{*}{E}_\theta)^{-1} T_0 r_в / \delta h r_н, \tag{4}$$

где u — перемещение витков рулона в радиальном направлении, δ — толщина ленты, h — ее ширина, E_θ^* — реологический оператор, описывающий вязкоупругие свойства материала рулона в тангенциальном направлении.

Считая в целях упрощения задачи коэффициенты поперечной деформации постоянными во времени, из уравнения (1) можно получить [1] следующие соотношения между напряжениями и деформациями в рулоне магнитной ленты:

$$\sigma_r(t) = E_r^* [\varepsilon_r(t) + \nu_{\theta r}\varepsilon_\theta(t)]/(1 - \nu_{\theta r}\nu_{r\theta});$$
$$\sigma_\theta(t) = E_\theta^* [\varepsilon_\theta(t) + \nu_{r\theta}\varepsilon_r(t)]/(1 - \nu_{\theta r}\nu_{r\theta}). \quad (5)$$

Здесь E_r^* — реологический оператор, описывающий свойства материала рулона в радиальном направлении, $\nu_{r\theta}$ и $\nu_{\theta r}$ — коэффициенты поперечной деформации.

Граничные условия при намотке ленты на абсолютно жесткую оправку таковы:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad r = r_в,$$
$$\sigma_r = 0 \quad \text{при} \quad r = r_н. \quad (6)$$

Заменяя, согласно принципу Вольтерра [3], в упругом решении поставленной задачи, описанном в работе [4], упругие константы соответствующими реологическими операторами и считая $\nu_{\theta r}=\mathrm{const}$, получаем следующие операторные выражения:

$$\sigma_r(t) = \frac{T_0}{\delta h} \cdot \frac{(\rho/k)^{\lambda^*-1} - (k/\rho)^{\lambda^*+1}}{k^{\lambda^*+1}(\lambda^* + \nu_{\theta r}) + k^{1-\lambda^*}(\lambda^* - \nu_{\theta r})};$$

$$\sigma_\theta(t) = \frac{T_0\lambda^*}{\delta h} \cdot \frac{(\rho/k)^{\lambda^*-1} + (k/\rho)^{\lambda^*+1}}{k^{\lambda^*+1}(\lambda^* + \nu_{\theta r}) + k^{1-\lambda^*}(\lambda^* - \nu_{\theta r})}, \quad (7)$$

где

$$\rho = r/r_в; \; k = r_н/r_в; \; \lambda^* = (E_\theta^*/E_r^*)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Реологические операторы E_θ^* и E_r^* можно представить [3] как

$$E_r^* = E_{r0}[1 - \chi_r Э_\alpha^*(-\beta_r)];$$
$$E_\theta^* = E_{\theta 0}[1 - \chi_\theta Э_\alpha^*(-\beta_\theta)]. \quad (9)$$

Операторы дробно-экспоненциальной функции Ю. Н. Работнова, воздействующие на некоторую функцию $\varphi(t)$, имеют вид [3]:

$$Э_\alpha^*(-\beta)\,\varphi(t) = \int_0^t Э_\alpha(-\beta, t-\omega)\cdot\varphi(\omega)\,d\omega =$$
$$= \int_0^t \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^l (t-\omega)^{l(1+\alpha)+\alpha}}{\Gamma[(l+1)(1+\alpha)]}\,\varphi(\omega)\,d\omega. \quad (10)$$

Используя свойство резольвентности и теорему умножения $\bar{Э}_\alpha$ операторов [3], можно получить

$$\lambda^* = \lambda_0 [1 - \chi_1 Э^*_\alpha(-\beta_1) - \chi_2 Э^*_\alpha(-\beta_2)]^{1/2}. \tag{11}$$

Здесь

$$\chi_1 = (\beta_\theta \chi_\theta - \beta_r \chi_\theta)/(\beta_r - \beta_\theta - \chi_r);$$

$$\chi_2 = (\chi_\theta \chi_r - \chi_r \beta_r - \chi_r \beta_\theta - \chi_r^2)/(\beta_r - \beta_\theta - \chi_r);$$

$$\beta_1 = \beta_\theta; \ \beta_2 = \beta_r - \chi_r; \tag{12}$$

$$\lambda_0 = (E_{\theta 0}/E_{r0})^{\frac{1}{2}}.$$

Для расшифровки операторных выражений (7) воспользуемся способом, предложенным в работе [2]. Будем рассматривать такое изменение напряженного состояния рулона магнитной ленты за время t, когда

$$\beta_i t^{1+\alpha} > 1. \tag{13}$$

Применяя к функциям интегральных операторов (7) разложение в ряд по интегральным операторам [4]

$$f[\rho, Э^*_\alpha(-\beta_1), Э^*_\alpha(-\beta_2)] =$$

$$= \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \alpha_{m_1, m_2}(\rho) D_m \sum_{i=1}^{2} \left[\prod_{j=1}^{2} (\beta_i - \beta_j) \right]^{-1} Э^*_\alpha(-\beta_i), \tag{14}$$

где

$$D_m = \frac{(-1)^{m_1+m_2-1}}{\prod_{i=1}^{m} (m_i - 1)!} \cdot \frac{\partial^{m_1+m_2-2}}{\partial \beta_1^{m_1-1} \partial \beta_2^{m_2-1}}, \tag{15}$$

и используя аппроксимацию дробно-экспоненциального оператора

$$Э^*_\alpha(-\beta_i) \cdot 1 = \frac{1}{\beta_i} \left[1 - \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l-1} \frac{\beta_i^{-l} t^{-l(1+\alpha)}}{\Gamma(1 - l - \alpha l)} \right], \tag{16}$$

находим согласно уравнению (14)

$$f[\rho, Э^*_\alpha(-\beta_1), Э^*_\alpha(-\beta_2)] \approx$$

$$\approx f\left(\rho, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}\right) + \sum_{l=1}^{N} \frac{t^{-l(1+\alpha)}}{\Gamma(1 - l - \alpha l)} \left[\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \beta_j} f\left(\rho, \frac{1}{\beta_1}, \frac{1}{\beta_2}\right) \right]. \tag{17}$$

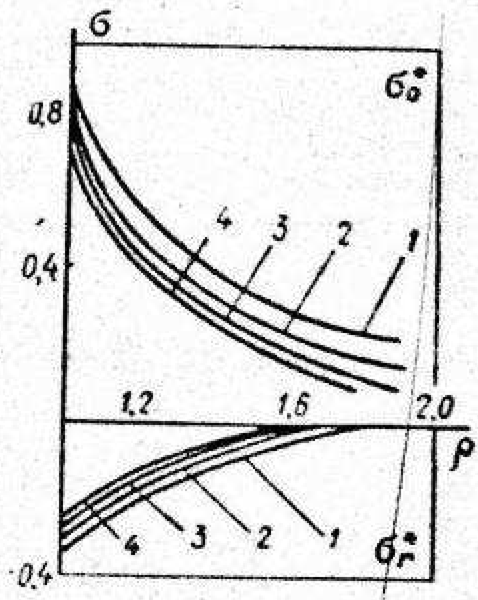
Для достаточно больших t, таких, что $-\beta_i t^{1+\alpha} \gg 1$, можно ограничиться первым членом ряда (17), тогда при $N = 1$

$$\sigma_r(t) = \sigma_r(\infty) + \frac{1}{t^{1+\alpha}\Gamma(-\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_\infty} + \frac{\partial}{\partial(\beta_r - \chi_r)}\right]\sigma_r(\infty);$$
$$\sigma_\theta(t) = \sigma_\theta(\infty) + \frac{1}{t^{1+\alpha}\Gamma(-\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_\theta} + \frac{\partial}{\partial(\beta_r - \chi_r)}\right]\sigma_\theta(\infty). \qquad (18)$$

$\sigma_r(\infty)$ и $\sigma_\theta(\infty)$ можно найти из уравнений (7) путем замены оператора λ^* его предельным значением

$$\lambda_\infty = \lambda_0\left[\frac{(\beta_\theta - \chi_\theta)\cdot\beta_r}{(\beta_r - \chi_r)\cdot\beta_\theta}\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (19)$$

Применение полученных уравнений к анализу напряженного состояния магнитной ленты, намотанной в рулон, позволяет оценивать изменение межвитковых давлений с течением времени, определять совокупность оптимальных параметров намотки рулона. На рисунке показаны кривые изменения напряженного состояния магнитной ленты, намотанной в рулон, рассчитанные по формулам (18), для магнитной ленты И-4411 со следующими характеристиками: момент на валу ведущего двигателя — 0,675 кг·см; толщина ленты — 0,032 мм; ширина — 6,25 мм; радиус оправки — 45 мм; вязкоупругие свойства:



Кривые напряженного состояния рулона магнитной ленты И-4411.

Время выдержки, ч: *1* — 0, *2* — 100, *3* — 1000, *4* — ∞

$$\alpha = -0{,}40; \ \ \beta_r = -0{,}532;$$
$$\beta_\theta = -0{,}995; \ \chi_r = 0{,}240;$$
$$\chi_\theta = 0{,}096; \ \lambda_0 = 4; \ \nu_{\theta r} = 0{,}18.$$

Со временем напряжения в рулоне падают по абсолютной величине, и если радиальное напряжение изменяется незначительно, то тангенциальное напряжение за 100 ч уменьшится на 20—40%. С течением времени скорость релаксации напряжений затухает, и уже для выдержки рулона $t = 1000$ ч напряжения незначительно отличаются от $\sigma(\infty)$.

Методом вытягивания тонких пластинок [1] было проведено экспериментальное исследование распределения радиальных напряжений в рулоне магнитной ленты И-4411 с указанными выше параметрами. Изучалось напряженное состояние рулона сразу по окончании процесса намотки и после выдержки в течение 100 ч при нормальной температуре. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными.

1. *Бугаков И. И.* Ползучесть полимерных материалов. М., Наука, 1973. 285 с. 2. *Долинина Н. И.* О функциях специальных операторов теории упруго-наследственных сред.— ДАН СССР, 1966, т. 170, № 1, с. 64—66. 3. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием.— ДАН СССР, 1948, т. 12, № 1, с. 16—18. 4. *Уманский Э. С., Крючков В. В., Раковский В. А.* К вопросу об определении напряженного состояния магнитной ленты, намотанной в рулон.— Проблемы прочности, 1978, № 3, с. 98—100.

Поступила в редколлегию 10.02.78

E. S. Umanskij, V. V. Krjuchkov, V. A. Rakovskij, N. S. Shidlovskij, V. S. Timoshenko

RESEARCH OF RELAXATION OF STRESSES IN WINDED MAGNETIC TAPE

The constructed theoretical solution of problem about the relaxation of stresses in winded magnetic tape which is based on using Boltzman's principle of superposition had been found.

The dependence making possible to rate the changes of intercoils pressure with the interval time by normal temperature to define the totality of optimum parameters of wind coils had been obtained.

The obtained results had been compared with experimented date.